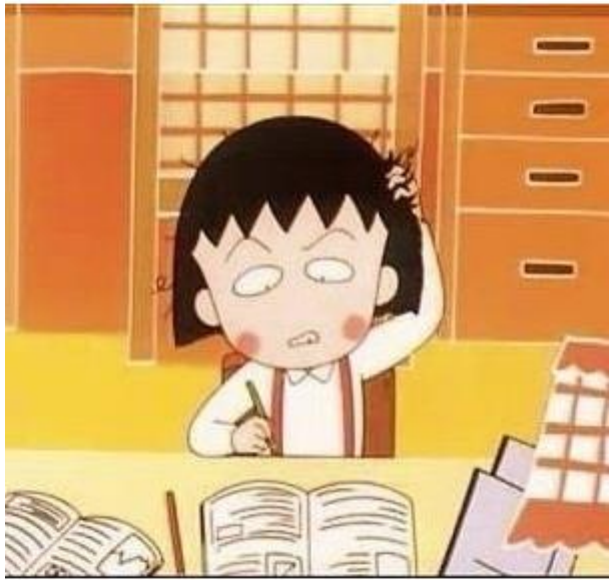
组合数学要考试啦？

期待

忧愁



欣喜

纠结

8周课程

99段视频

组合数学 Combinatorics

110道作业和Quiz


挑灯夜战型


考
神
逢考必过


一切随缘
exhausting

小伙伴们，怎么办？


信春哥
不挂科
不如
聊聊


组合数学
讲了啥

漫谈组合数学

思维锻炼：★★★☆☆

什么是组合数学

最精巧的排列——幻方

苦难的羊皮纸卷

你的手机密码安全吗

暴力枚举和抽象转换

无重复，无遗漏铭记在心

要抽象，少枚举事半功倍

排列与组合

思维锻炼：★★☆☆☆

- 小乒乓球的组合之旅
  - 加减乘除来计数
  - 排列还是组合
  - 各种各样的排列
  - 多样的组合
  - 钟声里的全排列

加法法则：若 $|\mathcal{A}|=m,\ |\mathcal{B}|=n,\ \mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\varnothing$，则 $|\mathcal{A}\cup\mathcal{B}|=m+n$

乘法法则：若 $|\mathcal{A}|=m,\ |\mathcal{B}|=n,$

$\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{(a,b)\mid a\in\mathcal{A},b\in\mathcal{B}\}$，则 $|\mathcal{A}\times\mathcal{B}|=m\cdot n$

分类加法分步乘

注意事件独立性

排列与组合

- 小乒乓球的组合之旅

加减乘除来计数

排列还是组合

各种各样的排列

多样的组合

钟声里的全排列

排列

圆排列

可重排列

多重全排列

组合

可重组合

不相邻组合

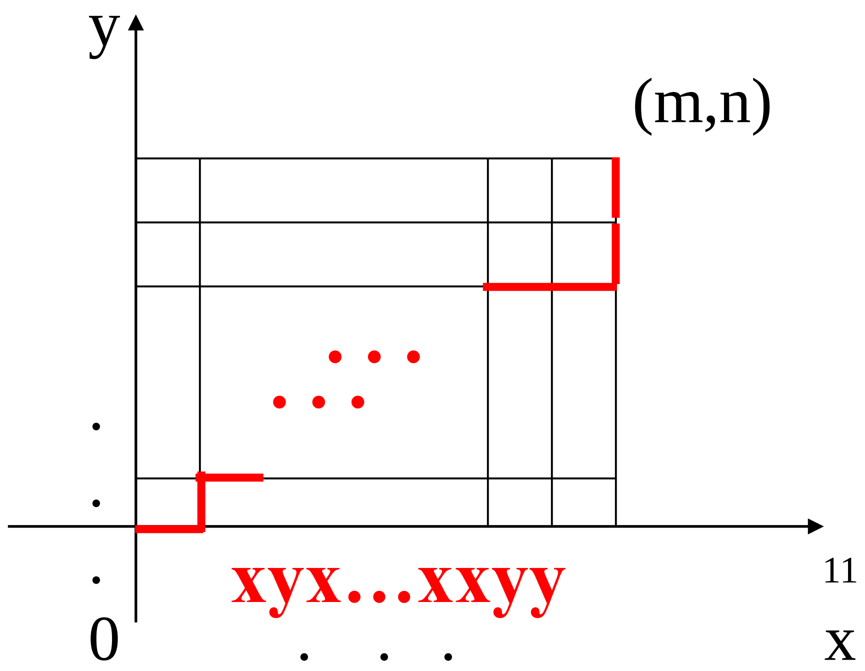
排列与组合

思维锻炼：★★☆☆☆

排列		组合
n个元素取r个**排队**		n个元素取r个
有序	r个元素排队标号方案 ⟺	无序
$P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$	$P(n,r)=C(n,r)r!$ ⟺	$C(n,r)=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

组合模型

思维锻炼：★★★☆☆

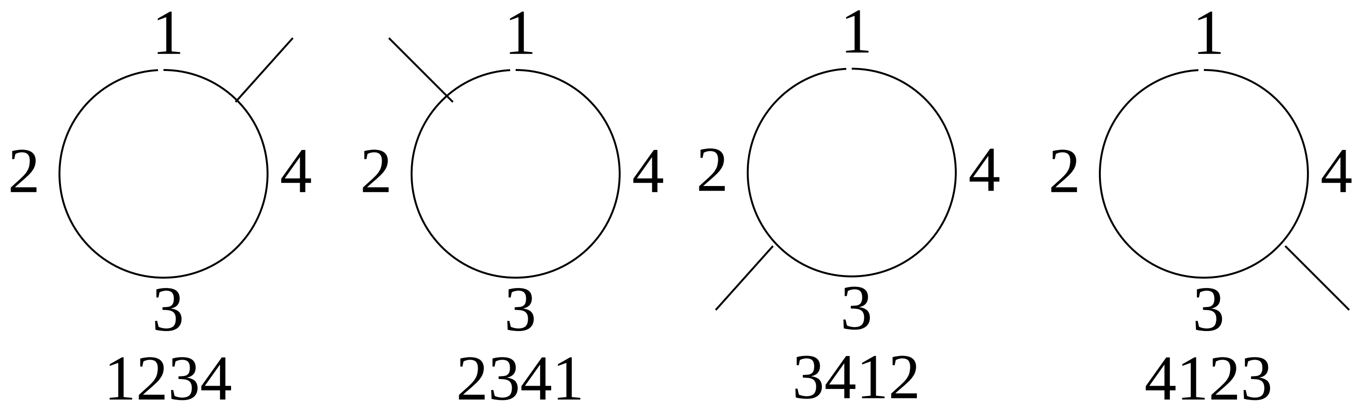


从 (0,0)点出发沿x轴或y轴的正方向每步走一个单位，最终走到(m,n)点。其路径数是$C(m+n,n)$.

圆排列

思维锻炼：★★★☆☆

- 圆排列：从n个**不同元素**中取r个的圆排列的排列数为 $P(n,r)/r$ ， $2\le r\le n$
- 以4个元素为例



排列与组合

思维锻炼：★★☆☆☆

排列 $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

可重排列

n种不同元素，个数无限，取出r个排队的方案数

$$n^r$$

例　26个英文字母能组成多少4位数的字符串？

26^4

例　26个英文字母能组成多少4位数的字符串，其中每位字母都不相同？

$P(26,4)$

例　26个英文字母能组成多少4位数的字符串，其中每位字母都不相同且b和d不相邻？

$P(26,4)-C(24,2)*3!*2$

排列与组合

思维锻炼：★★☆☆☆

可重排列　　多重排列

个数无限制　　多重全排列　　个数有限制

求r_1个1，r_2个2，…，r_t个t的排列数，设$r_1+r_2+\ldots+r_t=n$，多重全排列数为$P(n;r_1,r_2,\ldots,r_t)$。

对1，2，…，t分别加下标，得到 $\boldsymbol{P(n;r_1,r_2\ldots r_t)=\dfrac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_t!}}$

$$(a_1+a_2+\ldots+a_t)^n=\sum\frac{n!}{r_1!\ldots r_t!}a_1^{r1}\ldots a_t^{rt}\qquad \sum r_i=n$$

排列与组合

思维锻炼：★★★☆☆

可重组合

n种水果，个数无限制，从中选r个水果拼果篮

$C(n+r-1,r)$

隔板法

r个0

0 ..0 | 0.. 0 | 0.. 0 | | 0..0

n-1个门框

不相邻组合

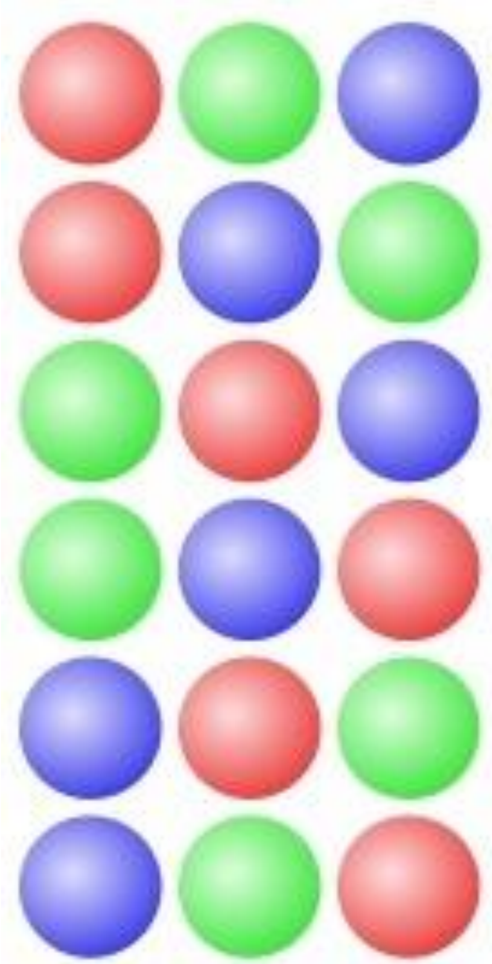
n个数中取r个作不相邻的组合，组合数为$C(n-r+1,r)$

线性方程$x_1+x_2\ldots+x_n=r$的非负整数解的个数是$C(n+r-1,r)$

Type	Sample	Order counts?	Repetition allowed?	Number of ways
无重组合	从n个球中取r个	No	No	$C(n, r)$
无重排列	从n个人中找r个排队	Yes	No	$P(n, r)$
可重组合	从n种水果中选r个拼果篮	No	Yes	$C(n+r-1, r)$
可重排列	n个字母组成的r位串	Yes	Yes	n^r
多重全排列	r_1个a, r_2个b组成的n位串	Yes	Yes	$n!/(r_1!\ r_2!)$

全排列生成算法

- 递归
- 字典序
- SJT算法
- ……



字典序法

思维锻炼：★★★☆☆

- [例]求839647521的下一个排列
- 1 先找从右到左第一次出现下降的位置4

  839647521
- 2. 交换：

  找后缀中比4大的最小的数

  839647521
- 3. 将后缀翻转

  839651247
- 得到下一个排列是839651247

SJT算法

思维锻炼：★★★☆☆

– {1 2 3 4}的全排列

$\overleftarrow{1}$ $\overleftarrow{2}$ $\overleftarrow{3}$ ↔ $\overleftarrow{4}$

1 2 ↔ 4 3

1 ↔ 4 2 3

$\overleftarrow{4}$ 1 2 ↔ 3

$\overrightarrow{4}$ ↔ 1 3 2

1 4 ↔ 3 2

1 3 4 ↔ 2

1 ↔ 3 2 4

Step 0: 从小到大排列，且方向都向左
Step 1: 选择当前最大的可移动数是4
Step 2: 将4和其指向的相邻数交换.

…

…

Step i: 4抵达边界且不可移动，当前最大的可移动数为3，3与2交换后，4改变方向，重新可移动

- 双方向移动最大的可移动数字
- 某个数字移动后，比它大的数字都要换方向，重新可以移动

母函数

思维锻炼：★★★★☆

对于序列$a_0, a_1, a_2, \cdots$，构造一函数：

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

称函数$G(x)$是序列$a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的母函数

$$(1-ax)^{-1} = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots..$$

- 整数拆分$p(n)$的母函数

$$G(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)\ldots(1+x^m+x^{2m})\ldots$$

线性常系数齐次递推关系

思维锻炼：★★★★☆

定义 如果序列$\{a_n\}$满足

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = 0,$$

$$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \cdots, a_{k-1} = d_{k-1},$$

$C_1, C_2, \cdots C_k$及$d_0, d_1, \cdots d_{k-1}$是常数，$C_k \neq 0$，则上式称为$\{a_n\}$的k阶常系数线性递推关系，

(Linear Homogeneous Recurrence Relations)

特征多项式 $C(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + \cdots + C_{k-1} x + C_k$

线性常系数齐次递推关系

思维锻炼：★★★★☆

- 线性常系数递推关系
  - 确定特征多项式
  - 判断特征方程根的情况
    - 非重根
    - 共轭复根
    - 多重根
  - 利用系数a_n的前若干项求解待定系数
  - 确定a_n

线性常系数齐次递推关系

思维锻炼：★★★★☆

根据特征多项式C(x)的非零解的情况

1)有k个不同非零实数解 $C(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$

$$a_n = l_1 a_1^n + l_2 a_2^n + \cdots + l_k a_k^n$$

其中 $l_1, l_2, \cdots, l_k$,是待定系数

$$\alpha_1 = \rho e^{i\theta} \qquad \alpha_2 = \rho e^{-i\theta}$$

$$a_n = A\rho^n \cos n\theta + B\rho^n \sin n\theta$$

其中A，B是待定常数。

3)有k重根。不妨设α_1是k重根。

$$(A_0 + A_1 n + \cdots + A_{k-1} n^{k-1})\alpha_1^n$$

其中$A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$是$k$个待定常数。

线性常系数齐次递推关系

思维锻炼：★★★★☆

- 递推关系
  - Hanoi问题
  - Fibonacci数列
  - 铺砖
  - n位序列中符合某些性质的排列数
  - 放球问题
  - …………

关键在于找对递推关系

指数型母函数

思维锻炼：★★★★☆

- 母函数　　　　求解组合问题

  对于序列$a_0, a_1, a_2, \cdots$，构造一函数：

  $$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

  称函数G(x)是序列$a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的母函数

- 指数型母函数　　求解排列问题

  对于序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ ，函数

  $$G_e(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a_k}{k!}x^k + \cdots$$

  称为是序列$a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的指数型母函数

指数型母函数

思维锻炼：★★★★☆

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\ldots}$$ 是$\{1,1,\ldots,1\}$的指数型母函数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\quad e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

$$\therefore\quad 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

排列问题

特殊序列

思维锻炼：★★★★☆

- Catalan数

$$C(n) = C(0)*C(n-1) + C(1)*C(n-2) + \ldots\ldots + C(n-2)*C(1) + C(n-1)*C(0)$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- 错排

容斥原理求解更直观

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), \quad n \geq 3.$$

$$\boldsymbol{D_n} = (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots \pm \frac{1}{\boldsymbol{n!}}) \cdot \boldsymbol{n!}$$

STIRLING数

思维锻炼：★★★★☆

第二类Stirling数$S(n,m)$:

把n个人分成m组，组内无顺序区别

n个有区别的球放到m个相同的盒子中,要求无一空盒

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1) \quad (n>1,m\geq 1).$$

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{h=1}^{m}C(m,h)(-1)^h(m-h)^n$$

容斥原理

思维锻炼：★★★★☆

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

$|\overline{A}| = N - |A|$,

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} |A_i \cap A_j| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

鸽巢原理

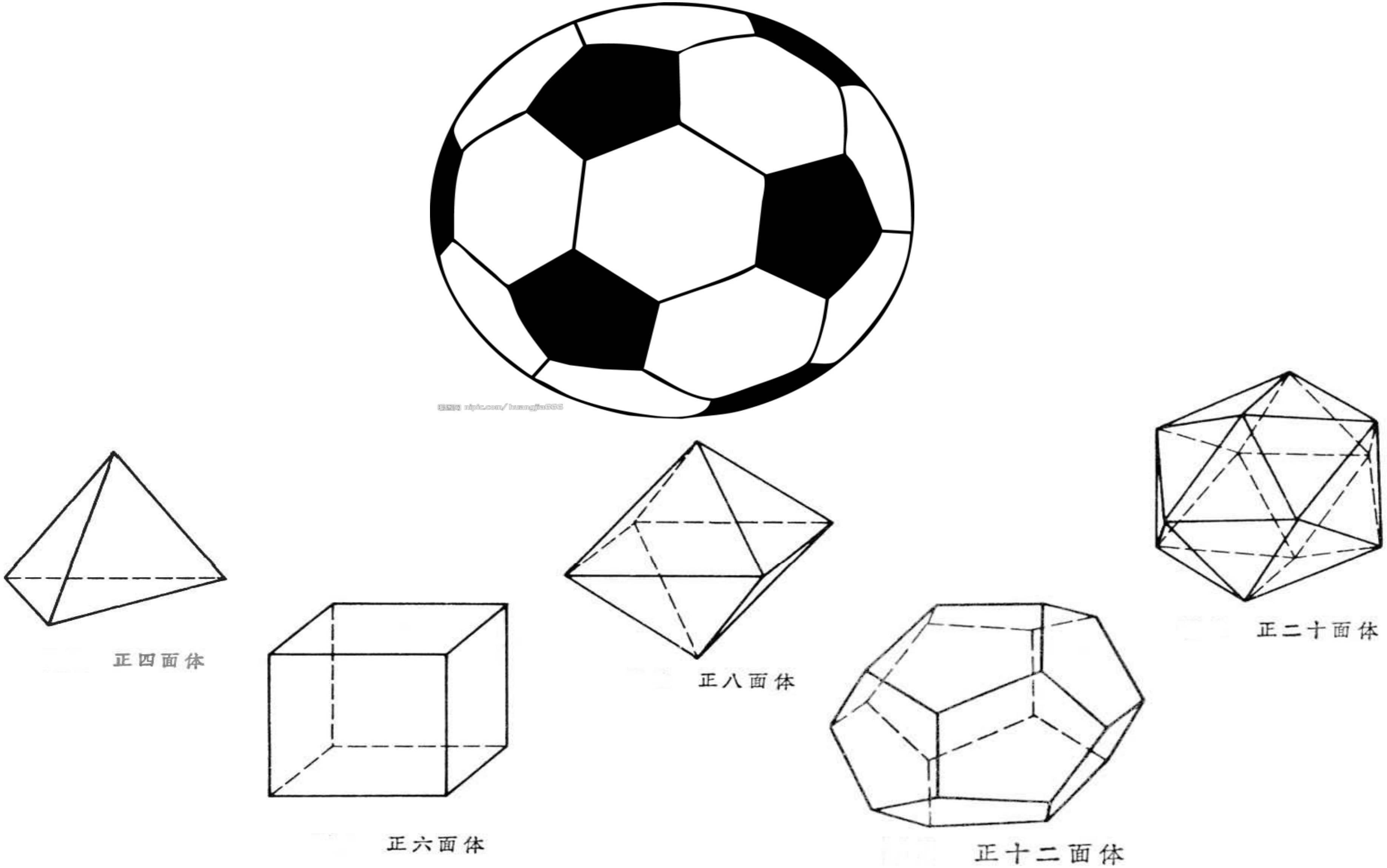
思维锻炼：★★★★☆

- “若有n个鸽子巢，n+1个鸽子，则至少有一个巢内有至少有$\lceil (n+1)/n \rceil=2$个鸽子。”
  - 出现$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$累加,多半要构造累加和
  - 出现奇偶性,整除,多半要取mod
  - 反证法
  - 内点问题
  - 多次利用鸽巢

POLYA定理

思维锻炼：★★★★½

- Burnside引理:设G={$a_1,a_2,\ldots a_g$}是目标集[1,n]上的置换群。每个置换都写成不相交循环的乘积。 G将[1,n]划分成l个等价类.$c_1(a_k)$是在置换a_k的作用下**不动点**的个数。 $l=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$
- **Pólya定理** 设G={$P1,P2,\ldots,Pg$}是n个对象的一个置换群，$C(Pk)$是置换Pk的循环的个数，用m种颜色对n个对象着色, 着色方案数为 $l=\frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{j=1}^{g}m^{C(\overline{P}j)}$
- 母函数型Pólya定理
  - $S_k=(b_1^k+b_2^k+\ldots+b_m^k),k=1,2\ldots n$ $\quad P(G)=\frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{j=1}^{g}\prod_{k=1}^{n}S_k^{C_k(\overline{P}j)}$


正四面体
正六面体
正八面体
正十二面体
正二十面体

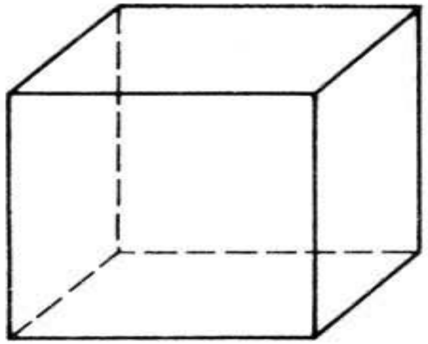
POLYA定理

思维锻炼：★★★★☆

- 熟悉各种凸多面体的转动群
  - 正六面体，足球等
- 欠角和的概念
- 平面多边形内角和等于$(v-2)\times 180^{\circ}$

  凸多面体与一个顶点相关的面角之和与360度的差称为该顶点的欠角。各顶点欠角的和为720度。
- 平面多边形的转动群
- 注意不动图象

转动群



正六面体

转动群	顶点	面	棱	个数
不动	$(1)^8$	$(1)^6$	$(1)^{12}$	1
面心-面心, ±90度	$(4)^2$	$(1)^2(4)$	$(4)^3$	6
面心-面心，180度	$(2)^4$	$(1)^2(2)^2$	$(2)^6$	3
棱心-棱心，180度	$(2)^4$	$(2)^3$	$(1)^2(2)^5$	6
空间对角线±120度	$(3)^2(1)^2$	$(3)^2$	$(3)^4$	8

转动群

转动群	顶点	面	棱	个数
不动			$(1)^{90}$	1
五边形面心-五边形面心 ±72,±144度	?	?	$(5)^{18}$	24
六边形面心—六边形面心 ±120度			$(3)^{30}$	20
正六边形棱中-棱中180度 （这种棱有30条）			$(1)^{2}(2)^{44}$	15

加减乘除来计数
排列组合分清楚
递推要算母函数
容斥鸽巢不糊涂
群论讲解转动群
着色方案一一数

在线考试
三个小时
选择填空
仔细审题
认真计算

欢迎同学们来检验学习成果